Séries entières

I. Convergence de séries entières

1°) Série entière

Déf : Soit (a_n) une suite complexe. On appelle série entière de coefficients a_n, la série des fonctions $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $f_n(z) = a_n z^n$. Par abus, cette série de fonctions est notée $\sum a_n z^n$. L'ensemble $\mathcal{D}$ des z où la série numérique $\sum a_n z^n$ converge est appelé domaine de convergence de celle-ci et la fonction $S : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelée somme de la série entière étudiée.

2°) Rayon de convergence

lemme : d'Abel

Soit $\rho > 0$. Si $(a_n \rho^n)$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ est ACV.

Déf : On appelle rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, le nombre $R = \sup\{\rho \geq 0 / (a_n \rho^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Théorème :

Si R est le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Si $|z| > R$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, plus précisément la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

Déf : Le disque $D(0, R)$ est appelé disque ouvert de convergence.

Prop : Pour $\lambda \neq 0$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

3°) Détermination du rayon de convergence

a) par comparaison

Soit R_a et R_b les rayons de convergence de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$.

Théorème :

Si à partir d'un certain rang $|a_n| \leq |b_n|$ alors $R_a \geq R_b$.

Cor : Si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

Si $a_n = o(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$.

Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.

b) par la règle de d'Alembert

Théorème :

Soit (a_n) une suite complexe de termes non nuls à partir d'un certain rang.

Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = 1/\ell$ en convenant que : $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.

4°) Opérations sur les séries entières

$\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ désignent des séries entières de rayons de convergence R_a et R_b.

a) somme

Déf : On appelle somme de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Théorème :

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors le rayon de

convergence R de la série entière somme $\sum(a_n+b_n)z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

De plus $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n$.

Prop : Si $R_a \neq R_b$ alors $R = \min(R_a, R_b)$.

b) produit

Déf : On appelle produit de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum c_n z^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Théorème :

Si R_a et R_b sont les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ alors le rayon de convergence R de la série entière produit $\sum c_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$ on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n\right)$.

5°) Continuité

Théorème :

Une série entière converge normalement (et donc uniformément) sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence.

Cor : La somme d'une série entière de rayon $R > 0$ est continue sur le disque ouvert de convergence.

Prop : Si la série $\sum |a_n| R^n$ converge alors la série entière converge normalement sur $\overline{D(0,R)}$ et sa somme y est continue.

II. Série entière d'une variable réelle

1°) Particularisation

Déf : L'intervalle $]-R, R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

L'ensemble I des x pour lesquels la série numérique converge est appelé intervalle de convergence de la série entière étudiée.

Théorème :

La série entière $\sum a_n x^n$ CN sur tout segment inclus dans $]-R, R[$ et donc la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ est définie et continue sur $]-R, R[$.

Prop : Si la série $\sum |a_n| R^n$ converge alors la série entière converge normalement sur $[-R, R]$ et sa somme y est donc définie et continue.

2°) Intégration

Prop : Les rayons de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}x^n$ sont égaux.

Théorème :

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$ alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ est définie sur $]-R, R[$ et y est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

3°) Dérivation

Prop : Les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}x^n$ ont même rayon de convergence.

Prop : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$ alors sa fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-R,R[$ et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$.

Théorème :

Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R>0$ alors sa fonction somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1)\ldots(n+1) a_{n+p} x^n$.

4°) Coefficients d'une série entière

Théorème :

Si $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R>0$ et de somme S alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$.

Cor : Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence >0 telle que sur un voisinage de 0 : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Ainsi l'écriture d'une série entière de rayon de convergence >0 est unique.

III. Fonctions développables en série entière

I désigne un intervalle $\mathbb{R}$ dont 0 est point intérieur.

1°) Définition

Déf : Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

On dit que f est développable en série entière sur $]-r,r[$ (avec $r>0$) ssi $]-r,r[\subset I$ et il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ telle que sur $]-r,r[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On dit que f est développable en série entière en 0 ssi il existe $r>0$ telle que f est développable en série entière sur $]-r,r[$.

2°) Série de Taylor

Déf : On appelle développement de Taylor en 0 d'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière : $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Théorème :

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors f y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et y est égale à la somme de sa série de Taylor en 0.

Cor : Il y a unicité du développement en série entière d'une fonction.

3°) Opérations sur les fonctions développables en série entière

Théorème :

Si $f, g : I \to \mathbb{C}$ sont développables en série entière sur $]-r,r[$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, λf , $\overline{f}$, $f+g$ et fg sont développables en série entière sur $]-r,r[$.

Cor : $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ ssi $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi.

Théorème :

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est développable en série entière sur $]-r,r[$ alors ses fonctions dérivées et primitives le sont aussi.

4°) DSE de $x \mapsto (1+x)^{\alpha}$

Théorème :

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, sur $]-1,1[$: $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

Prop : $\forall a \in \mathbb{C}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^{p+1}}$ est DSE sur $]-|a|,|a|[$.

Théorème :

Toute fonction rationnelle dont 0 n'est pas pôle admet un DSE qui s'obtient en formant le DSE d'une DES de celle-ci.